dır. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $|\alpha\beta| \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ eşitsizliği sağlandığından $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\frac{1}{n}a_n(f')\right| \leq \frac{1}{2}(a_n^2(f') + \frac{1}{n^2}), \left|\frac{1}{n}b_n(f')\right| \leq \frac{1}{2}(b_n^2(f') + \frac{1}{n^2})$$

yazılır.Buna göre, (9.88) ve (9.89) den $\forall x \in [-\pi, \pi]$ için

$$\begin{aligned} |a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx| &\leq |a_n(f)| + |b_n(x)| \\ &\leq \frac{1}{n}|b_n(f')| + \frac{1}{n}|a_n(f')| \\ &\leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}(a_n^2(f') + b_n^2(f')) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. $f'(x)$ fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ aralığında parçalı sürekli olduğundan (9.87) Bessel eşitsizliğine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty}[a_n^2(f') + b_n^2(f')] \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2\,dx$$

dir. Buradan, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a_n^2(f') + b_n^2(f')]$ serisinin yakınsak olduğu anlaşılır. Demek ki, f nin

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx \tag{9.90}$$

Fourier serisi yakınsak $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}(a_n^2(f') + b_n^2(f'))]$ serisi ile majorantlanabilir. Bu nedenle, Weierstrass testi gereğince (9.90) serisi $[-\pi, \pi]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonuna mutlak ve düzgün yakınsaktır. $\diamond$

9.8 Ek Problemler

(41) Aşağıda genel terimleri verilen (f_n) fonksiyon dizilerinin yakınsaklık bölgelerini ve limitlerini bulunuz.

(a) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$; (b) $f_n(x) = \sqrt{nx}e^{-n^2-x^2}$;
(c) $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + x^{2n} + 1}$; (d) $f_n(x) = \cos\pi(\sqrt{4n^2+nx})$;
(e) $f_n(x) = \sin(2\pi\sqrt{n^2 + \frac{n}{2} + x^2})$; (f) $f_n(x) = (\frac{2}{\pi}\arctan x)^{2n-1}$;
(g) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$; (h) $f_n(x) = \cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$;
(i) $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Cevap: (a) $E = \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ f(x) = \begin{cases} 0, & |\,x\,| < 1 \quad \text{ise}, \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \quad \text{ise}, \\ 1, & |\,x\,| > 1 \quad \text{ise}; \end{cases}$

(b) $E = [0, +\infty),\ f(x) \equiv 0$;

(c) $E = \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & |\,x\,| \leq 1 \quad \text{ise}, \\ x^2, & |\,x\,| > 1 \quad \text{ise}; \end{cases}$

(d) $E = \mathbb{R},\ f(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$;

(e) $E = \mathbb{R},\ f(x) = 1$; (f) $E = \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{4}{\pi x}}, & x < 0 \quad \text{ise}, \\ -e^{\frac{1}{\pi x}}, & x < 0 \quad \text{ise}, \\ 0, & x = 0 \quad \text{ise}; \end{cases}$

(g) $E = \mathbb{R},\ f(x) \equiv 0$; (h) $E = \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \quad \text{ise}, \\ 1, & x = 0 \quad \text{ise}; \end{cases}$

(i) $E = \mathbb{R},\ f(x) = 0$.

(42) Aşağıda genel terimleri verilen (f_n) dizilerinin karşılarında yazılı aralıklarda yakınsaklığını inceleyiniz.

(a) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad E = (1, 2]$;

(b) $f_n(x) = \frac{1}{x^2+nx+1}, \quad E = [0, 1]$;

(c) $f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad E = [0, 1]$;

(d) $f_n(x) = \frac{2n^2x}{1+n^\alpha x^2}, \quad E = \mathbb{R}$;

(e) $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}, \quad E = [-a, a]\,(a > 0)$;

(f) $f_n(x) = \frac{x}{n^2}\ln\frac{x}{n^2}, \quad E = (0, 1)$;

(g) $f_n(x) = n\ln(1 + \frac{1}{nx}), \quad E = (2, +\infty)$;

(h) $f_n(x) = \frac{nx+n^2+x^2}{n^2+x^2}, \quad E = (0, 1]$;

(i) $f_n(x) = \sqrt[n]{x \sin x}, \quad E = [0, \frac{\pi}{2}]$;

(j) $f_n(x) = \sin(n^2 e^{-nx}), \quad E = (0, +\infty)$;

(k) $f_n(x) = \ln(x^4 + \frac{1}{n}), \quad E = (a, +\infty)\,(a > 0)$;

(l) $f_n(x) = xe^{-n^2 x} \ln^3 n, \quad E = [0, +\infty)$;

(m) $f_n(x) = \sin^2(\sqrt{1 + nx^2} - \sqrt{n}x), \quad E = (1, +\infty]$;

(n) $f_n(x) = \arcsin \frac{2x^n}{1+2x^n}, \quad E = [0, 1]$;

(o) $f_n(x) = x^n, \quad E = (0, \frac{1}{2}) \cup \{1\}$;

(p) $f_n(x) = x^{2n} - x^n, \quad E = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$;

Cevap: (a) ıraksak ; (b) noktasal yakınsak ; (c) noktasal yakınsak ; (d) $\alpha \leq 2$ için $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ üzerinde noktasal yakınsak, $\alpha > 2$ için düzgün yakınsak ; (e) düzgün yakınsak ; (f) düzgün yakınsak ; (g) düzgün yakınsak ; (h) düzgün yakınsak ; (i) noktasal yakınsak ; (j) noktasal yakınsak ; (k) düzgün yakınsak ; (l) düzgün yakınsak ; (m) düzgün yakınsak ; (n) noktasal yakınsak ; (o) düzgün yakınsak ; (p) düzgün yakınsak ;

(43) Aşağıda genel terimleri verilen f_n dizilerinin karşılarında yazılı aralıklarda düzgün yakınsak olmadıklarını gösteriniz.

(a) $f_n(x) = \sqrt[n]{\cos^n x + \sin^n x}, \qquad E = [0, \frac{\pi}{2}]$;

(b) $f_n(x) = \sin^{2n} x + \frac{1}{n^2}, \qquad E = [0, \pi]$;

(c) $f_n(x) = \arctan 3nx - \arctan 2nx, \qquad E = (0, 1)$;

(d) $f_n(x) = n^2(1 - x)x^{n-1}, \qquad E = [0, 1]$;

(e) $f_n(x) = 1 - (1 - x^2)^n, \qquad E = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$;

(f) $f_n(x) = n(\frac{x}{\sqrt[3]{n}} - \arctan \frac{x}{\sqrt[3]{n}}), \qquad E = (1, +\infty)$;

(g) $f_n(x) = n^2(\cos hx^n - \frac{1}{1+x^n}), \qquad E = [0, 1)$;

(h) $f_n(x) = nxe^{-n|x|}, \qquad E = [-2, -1] \cup [0, 1].$

(44) Aşağıda genel terimleri verilen (f_n) dizilerinin karşılarında yazılı aralıklarda yakınsak veya düzgün yakınsak olduğunu inceleyiniz ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\,dx$$

eşitliğinin doğru olup olmadığını araştırınız.

(a) $f_n(x) = x^n,$ $\quad [a,b] = [0,1]$;

(b) $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx},\ \alpha > 0,$ $\quad [a,b] = [0,1]$;

(c) $f_n(x) = n x^\alpha e^{-nx},\ \alpha > 0,$ $\quad [a,b] = [0,1]$;

(d) $f_n(x) = \sqrt{n}\sin x\cos^{2n} x,$ $\quad [a,b] = [0,\frac{\pi}{2}]$;

(e) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},$ $\quad [a,b] = [0,1]$.

Cevap: (a) noktasal yakınsak, düzgün yakınsak değil, evet ; (b) $\alpha \geq 1$ için noktasal yakınsak, düzgün yakınsak değil, hayır, $-1 \leq \alpha \leq 1$ için noktasal yakınsak, düzgün yakınsak değil, evet, $\alpha < -1$ için düzgün yakınsak, evet; (c) $\alpha > 1$ için düzgün yakınsak, evet, $0 < \alpha \leq 1$ için noktasal yakınsak, düzgün yakınsak değil, evet;
(d) noktasal yakınsak, düzgün yakınsak değil, evet;
(e) noktasal yakınsak, düzgün yakınsak değil, evet.

(45) Aşağıda genel terimleri verilen (f_n) dizilerinin karşılarında yazılı aralıklarda;
1. yakınsak,
2. (f_n') dizilerinin düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz ve
3. $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)'_{x=x_0} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x_0),\ x_0 \in E$ eşitliğinin doğru olup olmadığını araştırınız.

(a) $f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan x^n,$ $\quad E = [0,1],\ x_0 = 1$;

(b) $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\sin n(x+\frac{\pi}{2}),$ $\quad E = \mathbb{R},\ x_0 \in E$;

(c) $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2},$ $\quad E = \mathbb{R},\ x_0 \in E$;

(d) $f_n(x) = e^{-n^2x^2},$ $\quad E = [-1,2],\ x_0 = 1$;

Cevap: (a) 2) düzgün yakınsak,3) hayır; (b) 2) düzgün yakınsak, 3) hayır; (c) 2)düzgün yakınsak,
3) her $x_0 \in E\backslash\{0\}$ için evet; (d) 1) noktasal yakınsak,
2) düzgün yakınsak değil, 3) evet.

(46) Aşağıdaki serilerin koşullu ve mutlak yakınsaklık bölgelerini bulunuz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n\sin x}}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^n}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sin^n x}{n(n+2)}$;
(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^n x$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3x-2}}$; (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^4+n}$;
(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\cos x}}$; (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{nx}}{n^x}$; (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{x+n}}$;

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n+x^{2n}}$; (k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x$; (l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[5]{n^4+|x|}}$;
(m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln^x (n+1)}$; (n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n} (2+(-1)^n)^n$; (o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{n^2 x^2+1}$;
(p) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+\sin x}$; (q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{\sqrt{n} \ln^2 (n+1)}$; (r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^{[[x]]} nx}{n^{\frac{x}{4}}}$.

Cevap:

(a) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (2n\pi, (2n+1)\pi)$ üzerinde mutlak yakınsak;

(b) $(0, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty))$ üzerinde mutlak yakınsak;

(c) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (-\arcsin \frac{1}{3} + n\pi, \arcsin \frac{1}{3} + n\pi)$ üzerinde mutlak yakınsak;

(d) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (\frac{\pi}{3} + n\pi, \frac{2\pi}{3} + n\pi)$ üzerinde mutlak yakınsak;

(e) $(1, +\infty)$ üzerinde mutlak yakınsak; $(\frac{2}{3}, 1]$ üzerinde koşullu yakınsak;

(f) $\mathbb{R}$ üzerinde koşullu yakınsak;

(g) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (\frac{-\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ üzerinde koşullu yakınsak;

(h) $(-\infty, 0)$ üzerinde mutlak yakınsak;

(i) $\mathbb{R}\backslash\{-n : n \in \mathbb{N}\}$ üzerinde koşullu yakınsak;

(j) $[-1, 1]$ üzerinde koşullu yakınsak;

(k) $\mathbb{Z}$ üzerinde koşullu yakınsak;

(l) $\mathbb{R}\backslash\{2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ üzerinde koşullu yakınsak;

(m) $(1, +\infty)$ üzerinde mutlak yakınsak, $(-\infty, 1]\backslash\{2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ üzerinde koşullu yakınsak;

(n) $\mathbb{R}$ üzerinde ıraksak ;

(o) $\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ üzerinde mutlak yakınsak, $\mathbb{R}\backslash\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ üzerinde koşullu yakınsak;

(p) $(-1, 1)$ üzerinde mutlak yakınsak, $x = 1$ için koşullu yakınsak;

(q) $\mathbb{R}\backslash\{(2n + 1)\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ üzerinde koşullu yakınsak;

(r) $(4, +\infty)$ üzerinde mutlak yakınsak, $[1, 2) \cup [3, 4)$ üzerinde koşullu yakınsak.

(47) Weierstrass testinden yararlanarak aşağıdaki serilerin karşılarında yazılı aralıklarda düzgün yakınsak olduklarını gösteriniz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}, \quad E = [0, +\infty)$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan nx}{x^4+n\sqrt[3]{n}}, \quad E = \mathbb{R}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}, \quad E = [1, +\infty)$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n\sqrt{n+x}}, \quad E = [0, \frac{1}{3}]$;

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^3(2x)^{2n}}{x^2+3n+4}, E = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$; (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin \frac{1}{nx}}{4+\ln^2 nx}, E = [2, +\infty)$;

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, \quad E = \mathbb{R}$; (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{x^2+n^2}, \quad E = \mathbb{R}$;

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} \frac{x^2 \sin x}{1+n^5x^4}, \quad E = \mathbb{R}$; (j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin \frac{x}{n}}{x^2+\ln^3(n+1)}, \quad E = \mathbb{R}$;

(48) Aşağıdaki serilerin karşılarında yazılı aralıklarda yakınsaklık karakterini inceleyiniz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi}{2}x^n), \quad E_1 = (0, a)\,(0 < a < 1),\ E_2 = (0, 1)$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}, \quad E_1 = [0, a]\,(a > 0),\ E_2 = [0, +\infty)$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n(x^2+2\sin x)}$, $E_1 = (0,1)\,, E_2 = [1,+\infty)$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^3x}}$, $E_1 = (0,1]\,, E_2 = (1,+\infty)$;

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(\frac{1}{nx})\cos nx}{4+\ln^2 2nx}$, $E_1 = (0,1)\,, E_2 = (1,+\infty)$;

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \tan \frac{1}{3^n x+1}$, $E_1 = (0,a)\,, E_2 = (a,+\infty)\,(a>0)$;

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{x}} \sin \frac{x}{4n^2}$, $E_1 = (0,a)\,, E_2 = (a,+\infty)(a>0)$;

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{n}} e^{-x^2 n}$, $E_1 = (a,+\infty)\,(a>0),\ E_2 = (0,+\infty)$;

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-x^2n^6}\sin(n^3x)$, $E_1 = (0,+\infty),\ E_2 = (a,+\infty)(a>0)$;

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+3^n}\sin(\frac{x}{2^n})$, $E_1 = [-5,5]\,, E_2 = (-6,6)$;

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\tan\sqrt{\frac{x}{n}}$, $E_1 = [0,\frac{1}{2}]\,, E_2 = [\frac{1}{2},1]$;

(l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3\ln(\frac{n}{(n+x)})}$, $E_1 = (0,1)\,, E_2 = (1,+\infty)$;

Cevap:

(a) E_1 üzerinde düzgün yakınsak, E_2 üzerinde noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir;

(b) E_1 üzerinde düzgün yakınsak, E_2 üzerinde noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir;

(c) E_1 üzerinde noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir, E_2 üzerinde düzgün yakınsak;

(d) E_1 üzerinde noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir, E_2 üzerinde düzgün yakınsak;

(e) E_1 üzerinde noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir, E_2 üzerinde düzgün yakınsak;

(f) E_1 üzerinde noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir, E_2 üzerinde düzgün yakınsak;

(g) E_1 üzerinde düzgün yakınsak, E_2 üzerinde noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir;

(h) E_1 üzerinde düzgün yakınsak, E_2 üzerinde noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir;

(i) E_1 üzerinde noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir, E_2 üzerinde düzgün yakınsak;

(j) E_1 üzerinde düzgün yakınsak, E_2 üzerinde noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir;

(k) E_1 üzerinde noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir, E_2 üzerinde düzgün yakınsak;

(l) E_1 üzerinde noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir, E_2 üzerinde düzgün yakınsak.

(49) Genel terimleri verilen aşağıdaki serilerin toplam fonksiyonlarının karşılarında yazılı aralıklarda sürekli olduklarını gösteriniz.

(a) $u_n(x) = \frac{\arctan nx}{\sqrt[3]{n^4+x}}, \quad E = \mathbb{R}$;

(b) $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}, \quad E = [2,5]$;

(c) $u_n(x) = xe^{-n^2x}, \quad E = [0,+\infty]$;

(d) $u_n(x) = 2^n \ln(1+\sin(\frac{1}{3^n+x})), \quad E = [0,+\infty]$;

(e) $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cos nx, \quad E = [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$.

(50) Aşağıdaki fonksiyonların tanım bölgelerini bulunuz ve süreklilik durumlarını inceleyiniz.

(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^2}$; (b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2} \cos nx$.

(51) Aşağıda verilen f fonksiyonunun $D(f)$ tanım bölgesini bulunuz ve onun $D(f)$ üzerinde türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

(a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$; (b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx}$;

(c) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\frac{5}{2}}}$; (d) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 \ln^2(n+1)}$.

Cevap:

(a) $D(f) = \mathbb{R}$; (b) $D(f) = [0, +\infty)$;

(c) $D(f) = \mathbb{R}$; (d) $D(f) = \mathbb{R}$.

(52) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$ fonksiyonunun $E = (0, +\infty)$ üzerinde istenilen mertebeden türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

(53) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ fonksiyonunun $E_1 = [0, +\infty)$ üzerinde sürekli ve $E_2 = (0, +\infty)$ üzerinde türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

(54) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan(\frac{x}{n^2})$ serisi $\mathbb{R}$ üzerinde terim terime türevlenebilir midir?

Cevap: Evet.

(55) Aşağıdaki serilerin karşılarında yazılı aralıklarda terim terime integrallenebilir olduklarını gösteriniz ve sonuçta elde edilen sayısal serileri bulunuz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$, $E = [\frac{1}{5}, 5]$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n}$, $E = [-1, 6]$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$, $E = [2, 3]$.

Cevap:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nn!} (\sin 5n - \sin \frac{n}{5})$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n} \frac{3^{n+1}-(-1)^{n+1}}{n+1}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (\cos 2n - \cos 3n)$.

(56) Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık aralıklarını bulunuz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}x)^n$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}x^n$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln^4 n}$;

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{\frac{n}{3}}x^{2n}}{n!}$; (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$;

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{[[\log_2 n]]}}$; (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(x+4)^{2n+1}}{(n+1)!}$;

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[1+(-1)^n 5]^n}{\sqrt{n^2+1}}(x+1)^n$; (j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$;

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^{n^2}(x+2)^{n^2}$.

Cevap:

(a) $E=\{0\}$; (b) $E=[-1,1]$; (c) $E=\mathbb{R}$;

(d) $E=[-1,1)$; (e) $E=\mathbb{R}$; (f) $E=(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$;

(g) $E=[-1,1)$; (h) $E=\mathbb{R}$; (i) $E=(-\frac{5}{6},\frac{7}{6})$;

(j) $E=[0,+\infty]$; (k) $E=(-\frac{11}{5},-\frac{9}{5})$.

(57) Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçaplarını ve yakınsaklık aralıklarını bulunuz.Aralıkların uç noktalarında serilerin yakınsaklık karakterini inceleyiniz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{2n-1}{3n+2})^n(x+2)^n$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}}(x+2)^n$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+(-3)^n}{n+1}x^n$; (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n(n^3+2)(x-1)^{2n}$;

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n^2}}{n^n}$; (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2\cos(\frac{n\pi}{4}))^n x^n}{\ln^2(n+1)}$;

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2})x^n (a>0, b>0)$; (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!})^{\alpha}(x-1)^n$.

Cevap:

(a) $R=\frac{3}{2}, E=(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2})$. $x=-\frac{7}{2}$ ve $x=-\frac{1}{2}$ için ıraksaktır;

(b) $R=1, E=(-3,-1)$. $x=-3$ ve $x=-1$ için ıraksaktır;

(c) $R=\frac{1}{5}, E=(-\frac{1}{5},\frac{1}{5})$. $x=-\frac{1}{5}$ için koşullu yakınsak, $x=\frac{1}{5}$ için ıraksaktır;